

ΝΔΟ

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} 3x = 3a$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \Delta \text{ΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ}$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$

ΛΥΣΗ (τα (i) και (ii) να γίνουν μέσω του ε-δωρισμού)

i) Αρκεί νδo. $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0): 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |3x - 3a| < \epsilon$ (*)

δίκως βλάβη της γενικότητας εστω $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \frac{\epsilon}{3} \stackrel{x_0=a}{\Rightarrow} \sqrt{(x-a)^2} < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow (x-a)^2 < \frac{\epsilon^2}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x-a| < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow 3|x-a| < \epsilon \Rightarrow |3x-3a| < \epsilon \Leftarrow (*)$

ii) Αρκεί νδo. $(\forall \epsilon > 0) (\exists \delta > 0): 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{3x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$

δίκως βλάβη της γενικότητας εστω $\delta = \frac{\epsilon}{3}$

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \frac{\epsilon}{3} \stackrel{x_0=0}{\Rightarrow} \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\epsilon}{3} \stackrel{y_0=0}{\Rightarrow} \sqrt{y^2} < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 < \frac{\epsilon^2}{9} \Rightarrow |y| < \frac{\epsilon}{3} (*) (*)$

Γενικά όμως $\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} < 1$

Άρα, $\left| \frac{3x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \left| \frac{3x^2 \cdot y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{3|y| \cdot |x|^2}{|x^2 + y^2|} =$
 $= 3|y| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} < 3|y| \cdot 1 \stackrel{(*) (*)}{<} 3 \cdot \frac{\epsilon}{3} \cdot 1 < \epsilon$

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) \right)$

$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ \perp & \neq & -1 \end{matrix}$

Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(ή θα μπορούσαμε να το λύσουμε μέσω επιλογής 2 ακολουθιών οι οποίες συγλίνουν στο 0 αλλά οι τιμές της f των ακολουθιών αυτών είναι διαφορετικές μεταξύ τους)

πχ $\rightarrow (x_n, y_n) = (1/n, 1/n)$ & $(x_n, y_n) = (1/n, 0)$